Opción A

Ejercicio n° 1 de la opción A de junio de 2004

De la función $f : (-1,+\infty) \to R$ se sabe que $f'(x) = 3/(x+1)^2$ y que $f(2) = 0$.
(a) [1'25 puntos] Determina f.
(b) [1'25 puntos] Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,1).

Solución

(a)
$f'(x) = 3/(x+1)^2$ con $f(2) = 0$.
Por el Teorema fundamental del Cálculo integral tenemos que
$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 3/(x+1)^2\,dx = 3.\int (x+1)^{-2}\,dx = [3.(x+1)^{-2+1}]/(-2+1) + K = -3/(x+1) + K$
Como $f(2) = 0$, tenemos $0 = -3/(2+1) + K = -3/3 + K = -1 + K$, de donde $K = 1$, y la función es
$f(x) = -3/(x+1) + 1$
(b)
Una primitiva de f(x) es $F(x) = \int f(x)\,dx = \int [-3/(x+1) + 1]\,dx = -3.Ln|x+1| + x + H$
Como pasa por (0,1) tenemos $1 = -3.Ln|0+1| + 0 + H = -3.0 + H = H$, es decir $H = 1$ y la primitiva pedida es
$F(x) = -3.Ln|x+1| + x + 1$

Ejercicio n° 2 de la opción A de junio de 2004

Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$.
(a) [1 punto] Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.
(b) [1'5 puntos] Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f?

Solución

(a)
La recta tangente en x = 1 es $y - f(1) = f'(1).(x-1)$
La recta normal en x = 1 es $y - f(1) = [-1/f'(1)].(x-1)$
$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$, luego $f(1) = 0$
$f'(x) = (x-1)(x-2) + (x+1)(x-2) + (x+1)(x-1)$, luego $f'(1) = 0 + 2(-1) + 0 = -2$, por tanto
La recta tangente en x = 1 es $y - 0 = -2.(x-1)$
La recta normal en x = 1 es $y - 0 = [-1/(-2)].(x-1) = 1/2.(x-1)$
(b)
El estudio de la curvatura es el estudio de $f''(x)$
$f'(x) = (x-1)(x-2) + (x+1)(x-2) + (x+1)(x-1)$
$f''(x) = (x-2) + (x-1) + (x-2) + (x+1) + (x-1) + (x+1) = 6x - 4$
De $f''(x) = 0$, tenemos $6x - 4 = 0$, de donde $x = 4/6 = 2/3$, que es el posible punto de inflexión.
Como $f''(0) = -4 < 0$, f(x) es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2/3)$
Como $f''(1) = 2 > 0$, f(x) es convexa ($\cup$) en $(2/3, +\infty)$
Por definición, x = 4/6 es el punto de inflexión, que vale $f(4/6) = f(2/3) = 20/27$

Ejercicio n° 3 de la opción A de junio de 2004

Considera el sistema de ecuaciones

$$mx - y = 1$$
$$x - my = 2m - 1$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores de m.
(b) [1 punto] Calcula los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que x = 3.

Solución

Dado el sistema de ecuaciones

$$mx - y = 1$$
$$x - my = 2m - 1$$

Su matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$ y su matriz ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{pmatrix}$.
En A tenemos $\det(A) = -m^2 + 1$.
Igualando a 0 resulta $m^2 = 1$, de donde m = 1 o m = -1.
Aplicando el Teorema de Rouche, si $m \neq 1$ o $m \neq -1$, rango(A) = rango(A^*) = 2, y el sistema es compatible y determinado, teniendo una única solución

Si m = 1

Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y su matriz ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
En A , rango(A) = 1, pues tiene dos columnas iguales

En A^*, rango(A^*) = 1, pues tiene dos filas iguales
Aplicando el Teorema de Rouche, como rango(A) = rango(A^*) = 1, el sistema es compatible e indeterminado, con lo cual tiene infinitas soluciones

Si m = - 1

Tenemos A = $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su matriz ampliada es A^* = $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

En A , rango(A) = 1, pues tiene dos filas iguales

En A^*, como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ = 3 – 1 = 2 $\neq$ 0, tenemos que rango(A^*) = 2.

Aplicando el Teorema de Rouche, como rango(A) = 1 $\neq$ rango(A^*) = 2, el sistema es incompatible y por tanto no tiene solución.

(b)

Vamos a calcular m en el sistema para que la x valga 3
Nuestro nuevo sistema sería

$$\begin{aligned} 3m - y &= 1 \\ 3 - my &= 2m - 1 \end{aligned}$$

Despejando y de la 1ª ecuación tenemos y = 3m - 1
Entrando con esta ecuación en la 2ª tenemos 3 – m(3m – 1) = $2m - 1$. Operando tenemos $3m^2 + m - 4 = 0$, de donde m = 1 y m = -4/3.
Por tanto para m = 1 o para m = -4/3 tenemos al menos una solución donde la x vale 3.

De otra forma de hacerlo (Antonio Menguiano)

Aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2m-1 & -m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix}} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-m+2m-1}{-m^2+1} = 3$$

. Simplificando $(m – 1)/(1 – m^2) = 3$, de donde $m – 1 = 3 – 3m^2$, y tenemos la ecuación $3m^2 + m – 4 = 0$, cuyas soluciones ya hemos visto antes que son m = 1 y m = -4/3.

Ejercicio n° 4 de la opción A de junio de 2004

Sean los puntos A(1, 2, 1), B(2, 3, 1), C(0, 5,3) y D(-1, 4,3).
(a) [1 punto] Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.
(b) [0'75 puntos] Demuestra que el polígono de vértices consecutivos ABCD es un rectángulo.
(c) [0'75 puntos] Calcula el área de dicho rectángulo.

Solución

A(1, 2, 1), B(2, 3, 1), C(0, 5,3) y D(-1, 4,3).

(a)

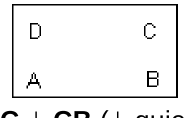
Para ver que los cuatro puntos están en un mismo plano una forma de hacerlo es, calcular un plano con tres de ellos y después comprobar que el cuarto pertenece a dicho plano.
Plano que pasa por A, B y C. Tomo como punto el A y como vectores el **AB** y el **AC**
A(1,2,1)
AB = (1,1,0)
AC = (-1,3,2)

$$\pi_{ABC} \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 = (x – 1)(2) – (y – 2)(2) + (z – 1)(4) = 2x – 2y + 4z – 2 = 0$$

Veamos si D(-1,4,3) pertenece a dicho plano
Como 2(-1) – 2(4) + 4(3) – 2 = - 2 – 8 + 12 = 0, D pertenece al plano y los cuatro puntos son coplanarios.

(b)

Para que el polígono ABCD sea un rectángulo tiene que verificarse que sus lados son paralelos y perpendiculares, es decir:



||**AD**|| = ||**BC**||, ||**DC**|| = ||**AB**||, **AD** $\perp$ **AB** y **DC** $\perp$ **CB** ($\perp$ quiere decir ortogonal o perpendicular)

AD = (-2,2,2) , luego ||**AD**|| = $\sqrt{4+4+4}$ = $\sqrt{12}$

BC = (-2,-2,-2) , luego ||**BC**|| = $\sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$, por tanto ||**AD**|| = ||**BC**||
DC = (1,-1,0) , luego ||**DC**|| = $\sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$
AB = (1,1,0) , luego ||**AB**|| = $\sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$, por tanto |**DC**|| = ||**AB**||
AD = (-2,2,2)
AB = (1,1,0)
Como **AD•AB** = -2 + 2 = 0, resulta que **AD** ⊥ **AB**(• es el producto escalar)
DC = (1,-1,0)
CB = (2,2,2)
Como **DC•CB** = +2 - 2 = 0, resulta que **DC** ⊥ **CB**(• es el producto escalar)
Por tanto el polígono ABCD es un rectángulo.
(c)
El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de dos vectores que salgan de un mismo vértice, es nuestro caso:
Área rectángulo = ||**AB**x**AD**||
AB = (1,1,0)
AD = (-2,2,2)

ABx**AD** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = **i**(2) – **j**(2) + **k**(4) = (2,-2,4), luego

Área rectángulo = ||**AB**x**AD**|| = $\sqrt{4+4+16} = \sqrt{24}$ u.a. (unidades de área)

Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B de junio de 2004

Se sabe que la función f : (-1,+∞) → ℜ definida por f(x) = $\begin{cases} x^2-4x+3 & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$, es continua en (-1,+∞).
(a) [1'25 puntos] Halla el valor de a.¿Es f derivable en x = 0?
(b) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución

f(x) = $\begin{cases} x^2-4x+3 & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

(a)
Como nos dicen que es continua en su dominio, es continua en 0, es decir
f(0) = $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

f(0) = $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+a}{x+1}$ = a/1 = a
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 - 4x + 3) = 3$
Como han de ser iguales tenemos que a = 3, y nuestra función es

f(x) = $\begin{cases} x^2-4x+3 & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+3}{x+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

La función es derivable en su dominio, salvo quizás en el 0
Su derivada, salvo en el cero es

f ‘(x) = $\begin{cases} 2x-4 & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{2x(x+1)-(x^2+3).1}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

Para que exista f ‘(0), ha de ser f ‘(0^+) = f ‘(0^-)
f ‘(0^+) = $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ = -3

$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - 4) = -4$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, no existe $f'(0)$

(b)

La monotonía (crecimiento y decrecimiento) sale del estudio de $f'(x)$

Si $-1 < x < 0$, $f'(x) = 2x - 4$

Igualando a cero $f'(x)$ tenemos $2x - 4 = 0$, de donde $x = 2$, que no está en el intervalo $-1 < x < 0$.

En $-1 < x < 0$, como $f'(-0'5) = 2(-0'5) - 4 < 0$, $f(x)$ es decreciente en $-1 < x < 0$

Si $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

Igualando a cero $f'(x)$ tenemos $x^2 + 2x - 3 = 0$, de donde $x = 1$ o $x = -3$. (Solo nos interesa $x = 1$, porque la función en esta rama está definida para $x > 0$)

Como $f'(0'5) = 2(0'5) - 3 < 0$, $f(x)$ es decreciente en $0 < x < 1$

Como $f'(2) = 2(2) - 3 > 0$, $f(x)$ es creciente en $x > 1$

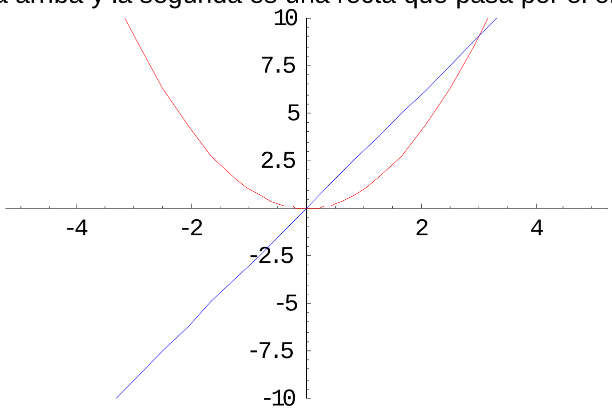
Por definición $x = 1$ es un mínimo relativo que vale $f(1) = 4/2 = 1/2$

Ejercicio nº 2 de la opción B de junio de 2004

[2'5 puntos] Determina b sabiendo que $b > 0$ y que e! área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 6x$ es igual a $9/2$.

Solución

Las gráficas de $y = x^2$ e $y = bx$ con $b > 0$, son conocidas. La primera es una parábola que tiene de vértice el punto (0,0) y las ramas hacia arriba y la segunda es una recta que pasa por el origen (0,0)



Viendo la gráfica el área $9/2 = \int_0^a$ (recta – parábola)dx

Los limites de integración se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 = bx$, de donde $x^2 - bx = 0$, es decir $x(x - b) = 0$, de donde obtenemos $x = 0$ y $x = b$

$$\text{área} = 9/2 = \int_0^b (bx - x^2)dx = \left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^b = b^3/2 - b^3/3 = b^3/6$$

Igualando tenemos $9/2 = b^3/6$, de donde $b^3 = 27 = 3^3$, luego $b = 3$.

Ejercicio nº 3 de la opción B de junio de 2004

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Calcula A.B, A.C, $A^t.B^t$ y $C^t.A^t$, siendo A^t, B^t y C^t las matrices transpuestas de A, B y C, respectivamente.

(b) [1'25 puntos] Razona cuáles de las matrices A, B, C y AB tienen matriz inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

Solución

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a)

$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ (matriz identidad de orden 2)

A.C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $A^t.B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$C^t.A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b)
Para que una matriz tenga inversa tiene que ser cuadrada y además su determinante tiene que ser distinto de cero, por tanto las matrices A, B y C no tienen inversa porque no son cuadradas.
La única que es cuadrada es A.B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, además su determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego A.B tiene inversa. Ahora bien como la matriz A.B es la matriz identidad de orden 2, su inversa es ella misma, es decir $(A.B)^{-1} = A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ (matriz identidad de orden 2)

Ejercicio nº 4 de la opción B de junio de 2004

[2'5 puntos] Dados los vectores **u** = (2, 1, 0) y **v** =(-1, 0, 1), halla un vector unitario **w** que sea coplanario con **u** y **v** y ortogonal a **v**.

Solución

u = (2, 1, 0) y **v** =(-1, 0, 1)
Un vector que sea coplanario con **u** y **v** es una combinación lineal de ellos, por ejemplo el vector **t** = **u** + λ**v** = (2, 1, 0) + λ.(-1, 0, 1) = (2 - λ, 1, λ)
Como tiene que ser perpendicular a **v** su producto escalar es cero, es decir **t•v** = 0
t•v = 0 = - 2 + λ + 0 + λ = - 2 + 2λ = 0, de donde λ = 1, por tanto un vector coplanario con **u** y **v**, y además perpendicular a **v** es **t** = (2 – (1), 1, (1)) = (1,1,1). Como también nos piden que se unitario, un vector podría ser el vector **w** = **t**/(||**t**||) = $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, puesto que ||**t**|| = $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

Otro sería - **w** = - **t**/(||**t**||) = $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

Otra forma de hacerlo (Javier Costillo)

Sea $\vec{w} = (x, y, z)$ el vector pedido.

Por ser coplanario con $\vec{u} = (2,1,0)$ y $\vec{v} = (-1,0,1)$ $\Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + z = 0$

Por ser ortogonal a $\vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow -x + z = 0$

Por ser unitario $\Rightarrow |\vec{w}| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Obtenemos así un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que NO es lineal.
Para resolverlo, podemos despejar *z* en la segunda ecuación e *y* en la primera y sustituir en la tercera para calcular *x*:

$x - 2y + z = 0 \Rightarrow -2y = -x - z = -x - x = -2x \Rightarrow y = x$

$-x + z = 0 \Rightarrow z = x$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow x^2 + x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = y = z$

Obtenemos así dos vectores que cumplen las condiciones pedidas:

$$\vec{w}_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \text{ y } \vec{w}_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$